Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS FED

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour la plupart des spécialités, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot par une fonction exponentielle** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2022/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot par une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m·s⁻¹ et sa vitesse pendant le freinage est modélisée par une fonction f. Les trois parties étudient l'équation différentielle de f, ses variations et la distance parcourue, puis son développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie dans l'énoncé s'applique à une équation de la forme $y' + ay = 0$. Ici, le coefficient constant est $a = 0,8$. Les solutions sont donc des exponentielles de la forme ke^{-at}, où k est une constante réelle quelconque. Cette famille est définie et dérivable sur l'intervalle considéré $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est-elle solution de l'équation (E) : y' + 0,8y = 4 ? Vérifier qu'elle en est une solution.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée vaut $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant y par g dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Le résultat est égal au membre de droite de l'équation. L'égalité est vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$, donc g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $g(t) = 5$ vérifie $g' + 0,8g = 4$ pour tout $t \geq 0$: c'est une solution particulière de (E).

Question 1. c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La question précédente établit que $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute solution de cette équation s'obtient en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène associée, $y' + 0,8y = 0$. D'après la question 1.a, ces solutions homogènes sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions de (E) est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale obtenue précédemment s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À l'instant initial $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc $f(0) = 5 + k$. La condition donnée impose $5 + k = 20$, d'où $k = 15$. En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression de la fonction établie dans la partie A : $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Par conséquent, le produit $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers zéro. Le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse tend vers la valeur finie 5 : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

1. La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie.
2. Une courbe dont la fonction tend vers une limite finie admet une asymptote horizontale à droite.

La valeur de cette limite est 5. L'équation de l'asymptote horizontale à la courbe C est donc $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe C admet, en $+\infty$, l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, et f est strictement décroissante sur tout l'intervalle. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or la vitesse est strictement décroissante et sa limite en temps infini est égale à 5, d'après l'étude précédente. Elle reste donc supérieure à cette limite et ne peut pas atteindre zéro à un instant fini. Dans ce modèle, le chariot ralentit sans jamais s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas dans ce modèle, car sa vitesse tend vers $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

Pour vérifier que F est une primitive de f, on dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément celle de $f(t)$, pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Comme $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, la fonction F est bien une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. On a $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$, donc $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'arrondi au centimètre s'effectue après l'évaluation numérique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La distance exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}\,\mathrm{m}$, soit $15,33\,\mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Une seule proposition parmi les trois est exacte. Recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, en utilisant l'affichage du logiciel. Aucune justification n'est demandée.

> L'affichage du logiciel donne comme partie régulière du développement limité $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions imprimées, seule la troisième respecte à la fois les coefficients affichés et la forme du reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale fournit $f(0) = 20$, et la formule donnée pour la dérivée donne $f'(0) = -12e^{-0,8\times 0} = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient une droite de pente -12 passant par le point $(0; 20)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance

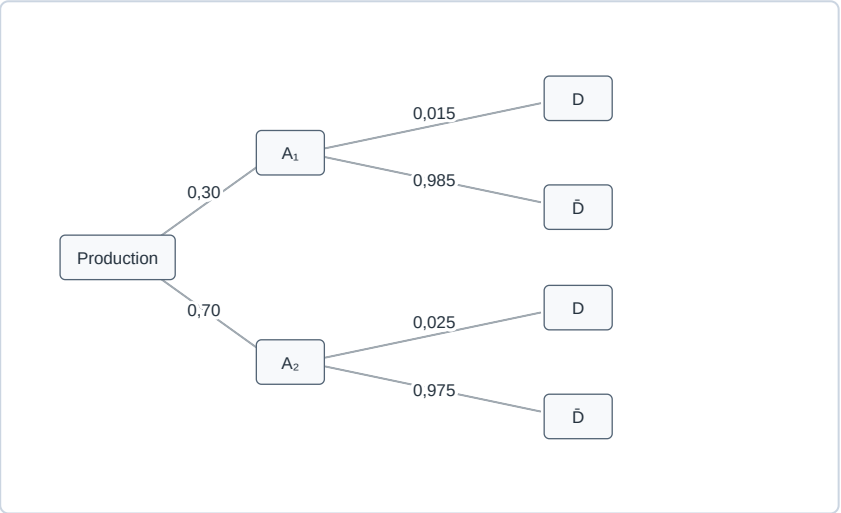
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des tests renseignent sur la présence de défauts et la durée de bon fonctionnement. L'exercice porte ensuite sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 pièces.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production et de défauts dans chaque atelier, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

On sépare d'abord la production selon l'atelier : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. Depuis chaque atelier, la branche « défaut » porte la proportion de défauts indiquée dans l'énoncé. La branche « sans défaut » est son complément à 1. Ainsi, les probabilités issues de chaque nœud totalisent 1 : 0,30 + 0,70 = 1, 0,015 + 0,985 = 1 et 0,025 + 0,975 = 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités issues de chaque nœud totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

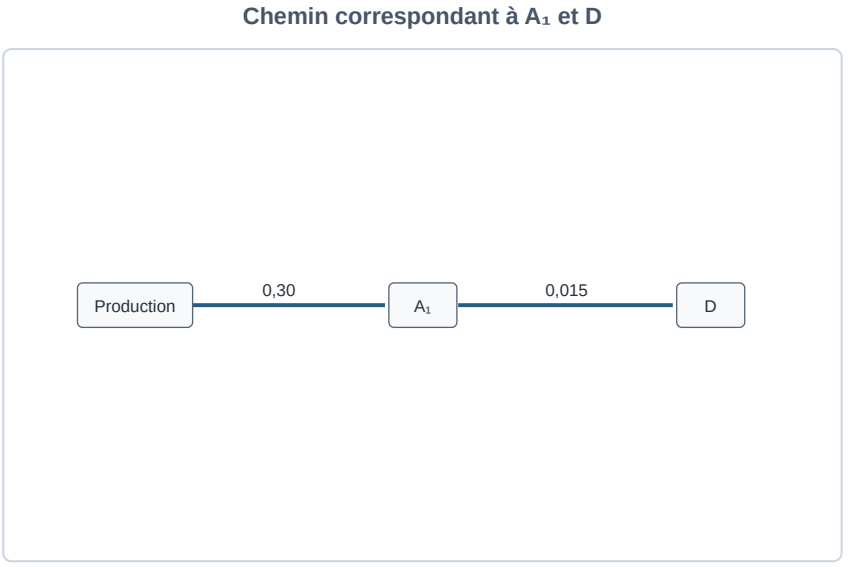
Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70), puis défaut ou absence de défaut selon les probabilités conditionnelles indiquées.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

L'intersection correspond au chemin où le tube provient de l'atelier 1 et présente un défaut. On multiplie donc la probabilité de choisir l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier :

$$P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045.$$

La probabilité cherchée est une proportion de la production totale.



La probabilité de ce chemin est le produit des probabilités des deux branches.

✓ RÉPONSE À RETENIR

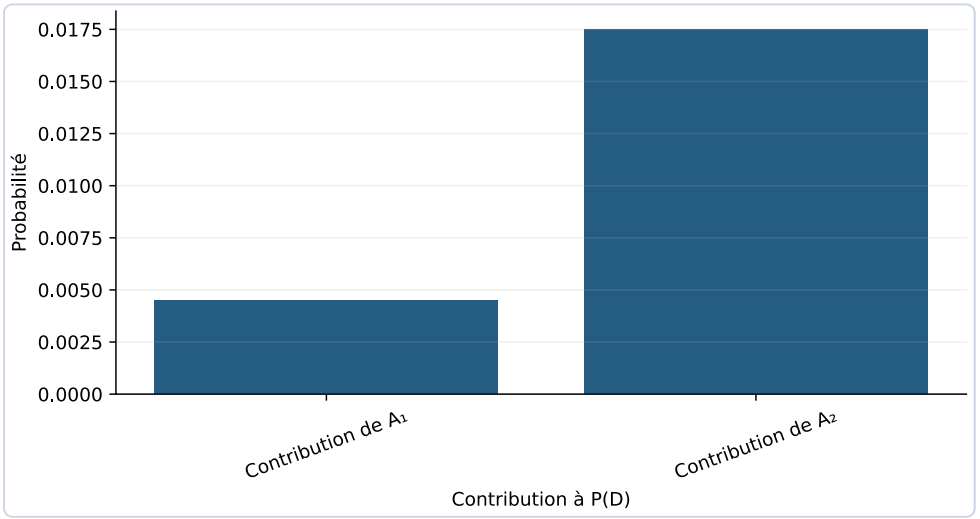
$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\,\%$ de la production totale.

Question 3. À partir des données des deux ateliers, vérifier l'affirmation imprimée selon laquelle P(D) = 0,0195. La page comporte également une annotation manuscrite indiquant 0,0220.

Les événements « le tube vient de l'atelier 1 » et « le tube vient de l'atelier 2 » forment une partition. La formule des probabilités totales donne donc :

$$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0045 + 0,0175 = 0,0220.$$

Le calcul confirme l'annotation manuscrite sur la page. La valeur imprimée 0,0195 ne correspond pas aux proportions fournies pour les deux ateliers.



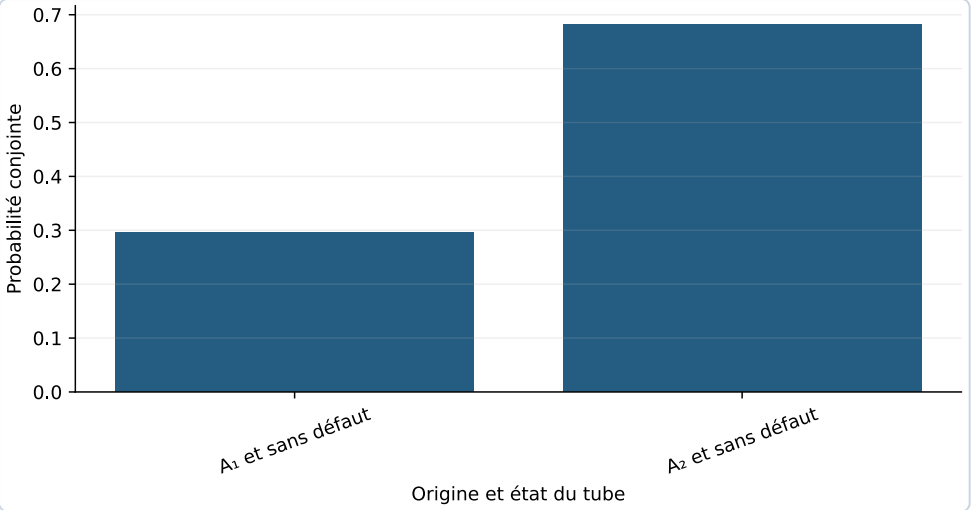
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0,0220$. L'annotation manuscrite est correcte ; la valeur imprimée $0,0195$ est incorrecte.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité que le tube vienne de l'atelier 2 sachant qu'il est sans défaut. La probabilité conjointe au numérateur vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. Au dénominateur, la probabilité d'absence de défaut vaut $1 - P(D) = 1 - 0,0220 = 0,978$. Ainsi :

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,6825}{0,978} \approx 0,698.$$



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ $69,8\,\%$ des tubes sans défaut.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

La page donne la formule de l'espérance d'une loi exponentielle : $E(T) = 1/\lambda$. Avec le paramètre $\lambda = 0,001$ par heure :

$$E(T) = \frac{1}{0,001} = 1\,000 \text{ heures}.$$

Dans ce modèle, 1 000 heures est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents prélevés dans le stock.

Espérance de la durée de fonctionnement

Paramètre	Espérance
λ = 0,001 h⁻¹	1 000 h

Pour une loi exponentielle, l'espérance est l'inverse du paramètre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

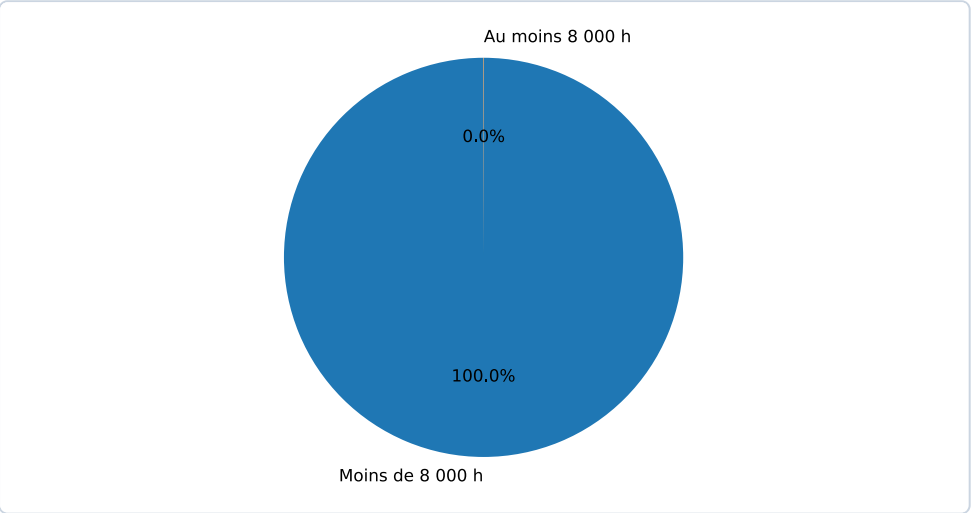
$E(T) = 1\,000$ heures : la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est de 1 000 heures.

Question 2. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme une loi exponentielle est continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Avec $\lambda = 0,001$:

$$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} \approx 0,99966.$$

Arrondie au centième, cette probabilité est égale à 1,00.



✓ RÉPONSE À RETENIR

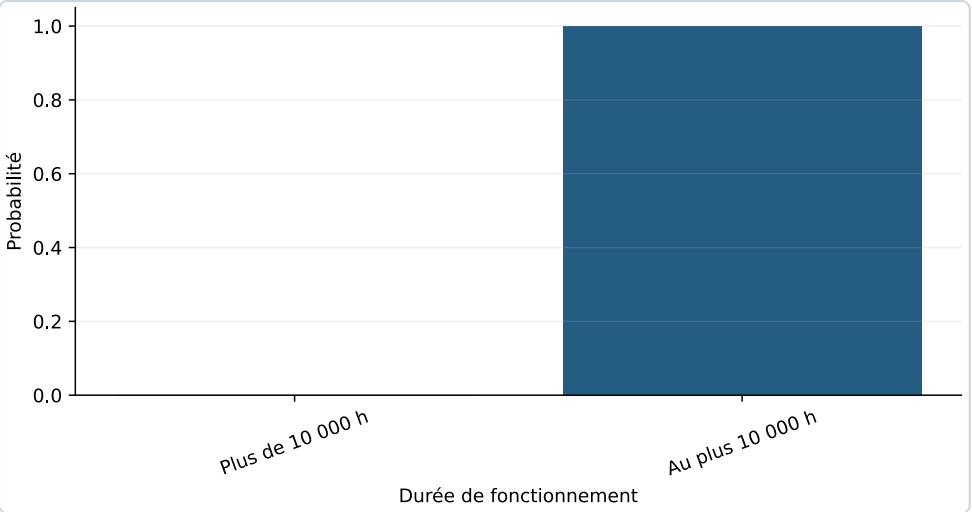
$P(T < 8\,000) \approx 1,00$, arrondie au centième : presque tous les tubes ont une durée inférieure à 8 000 heures.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit supérieure à 10 000 heures.

L'événement $T > 10\,000$ est le complément de $T \leq 10\,000$. Avec la formule de la loi exponentielle, sa probabilité est donc :

$$P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} \approx 0,0000454.$$

Arrondie au centième comme demandé, cette probabilité vaut 0,00. La probabilité exacte reste positive, mais elle est très faible.



✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$, arrondie au centième ; la probabilité non arrondie vaut environ $0,0000454$.

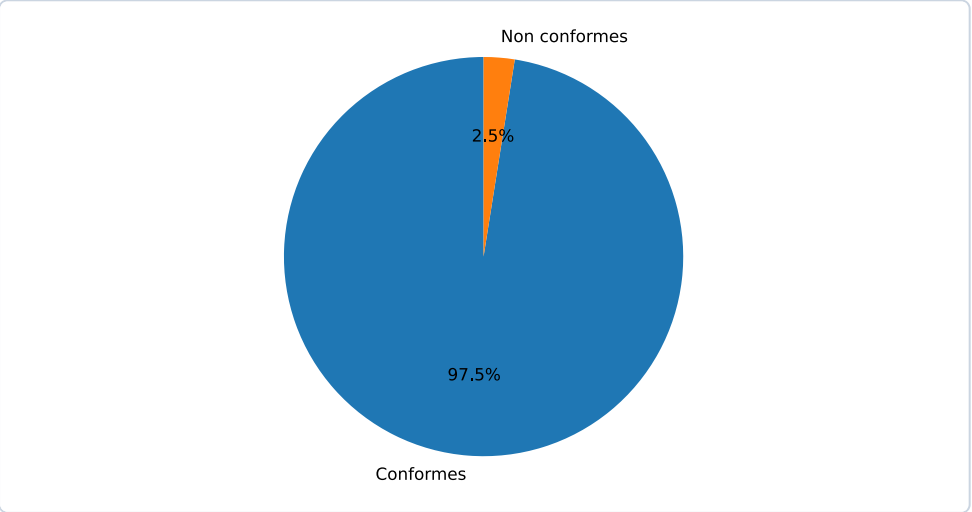
Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes sur 1 000 rivets prélevés :

$$\hat{p} = \frac{975}{1\,000} = 0,975.$$

Cette estimation correspond à 97,5 % de rivets conformes dans l'échantillon.



✓ RÉPONSE À RETENIR

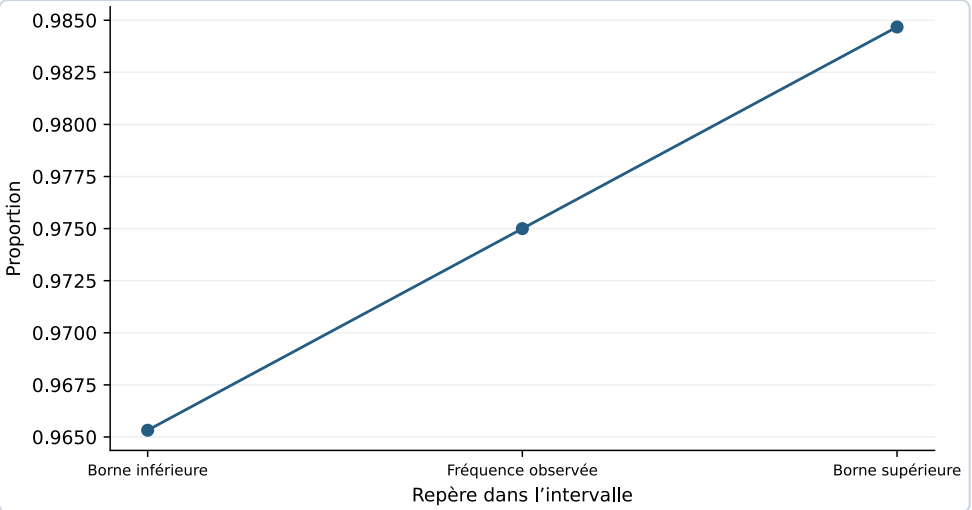
$\hat{p} = 0,975$, soit une estimation ponctuelle de $97,5\,\%$ de rivets conformes.

Question 2. À l'aide de la formule fournie pour l'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée pour p. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 975/1\,000 = 0,975$, et la taille de l'échantillon est $n = 1\,000$. En appliquant la formule de l'énoncé :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \;;\; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right] \approx [0,965323 \;;\; 0,984677].$$

L'arrondi des deux bornes au millième donne l'intervalle demandé.



✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % pour p, bornes arrondies au millième : $[0,965 \;;\; 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et vaut généralement coefficient 2, ou 3 en Traitement des matériaux. Elle comprend deux exercices sur 10 points : le freinage d'un chariot modélisé par une exponentielle, puis les défauts et durées de vie de tubes ainsi que la conformité de rivets. Elle évalue équations différentielles, analyse, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; pour l'équation complète, on ajoute une solution particulière.
- La distance parcourue sur $[t_0 ; t_1]$ est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt.
- Pour T exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt), P(T > t) = e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- La fréquence observée estime une proportion ; l'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'équation différentielle, vérifier la solution particulière puis appliquer la condition initiale.
- Pour une asymptote horizontale, relier la limite de f à l'équation y = constante.
- Dans un arbre, multiplier les probabilités le long d'un chemin et additionner les chemins concernés.
- Respecter les unités et les arrondis demandés ; vérifier la cohérence des données de défauts et de P(D).

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour déterminer la constante restante.

Q : Comment choisir la formule de probabilité pour une durée de vie exponentielle ?

Pour une durée T de paramètre λ, la probabilité d'une durée au plus t est 1 - e^(-λt), tandis que celle d'une durée supérieure à t est e^(-λt). L'espérance vaut 1/λ.

Q : Comment répartir le temps pour cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en parties indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs.

Q : Quels critères de précision faut-il respecter ?

Suivez l'arrondi précisé dans chaque consigne : distance au centimètre, probabilités à 10^{-2} et bornes de l'intervalle de confiance à 10^{-3}. Indiquez les unités pour les durées et les distances.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2022/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Fluides Énergies Domotique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.