Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS FED

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2022/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est modélisée sur les temps positifs. Les questions étudient cette fonction par une équation différentielle, ses variations et sa limite, la distance parcourue, puis son développement limité et la tangente à l'origine.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur [0 ; +∞[.**

Pour l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, on applique la formule fournie : les solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, où k est une constante réelle. En effet, le coefficient de y est ici $a = 0{,}8$. Cette famille de fonctions est définie et dérivable sur tout l'intervalle $[0 ; +\infty[$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de (E_0) sont $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Cette valeur est égale au second membre de l'équation, donc g vérifie bien (E) pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de (E), car $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$.

Question 1. c. **En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en lui ajoutant toutes les solutions de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0{,}8t}$. Ainsi, toute solution est de cette forme, et réciproquement chaque fonction de cette famille vérifie l'équation différentielle sur $[0 ; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions de (E) est $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale de (E) est $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$. À $t = 0$, l'exponentielle vaut $e^0 = 1$. La condition initiale impose donc $f(0) = k + 5 = 20$, d'où $k = 20 - 5 = 15$. On remplace cette constante dans l'expression générale pour obtenir la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5, sachant que $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers +∞, le produit $-0,8t$ tend vers -∞. Or l'exponentielle tend vers zéro lorsque son exposant tend vers -∞. Par les règles sur les limites, le terme $15e^{-0,8t}$ tend donc vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers +∞ est 5.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

D'après la limite établie, $f(t)$ tend vers la valeur finie 5 lorsque t tend vers +∞. La courbe représentative d'une fonction dont la limite en +∞ est finie admet une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Ici, cette droite est donc parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point d'ordonnée 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe C est la droite d'équation $y = 5$.

Question 2. Sachant que $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en +∞ vaut 5. Le tableau résume son évolution sur l'intervalle demandé.

t	0		+∞
Signe de $f'(t)$		-	
Variation de f	20	↘	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle à un instant. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais. Elle se rapproche de 5 $m \cdot s^{-1}$, mais ne l'atteint pas selon le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 $m \cdot s^{-1}$ et le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **Vérifier que la fonction F définie par $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme donne $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second donne 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Question 4. b. **Sachant que la distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$, calculer la distance entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, sous forme exacte puis arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1 seconde. En utilisant la primitive F, on obtient $d = F(1) - F(0)$. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'évaluation puis l'arrondi au centimètre donnent la distance demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ m$ (au centimètre).

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne le polynôme régulier $20 - 12t + (24/5)t^2$. Dans un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Comme $24/5 = 4,8$, la proposition correcte est celle qui reprend le terme $-12t$ et ajoute ce reste d'ordre 2.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La bonne proposition est $20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. Avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, on obtient $f'(0) = -12e^{0} = -12$. En reportant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son expression.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'équation de la tangente à C en l'origine est $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

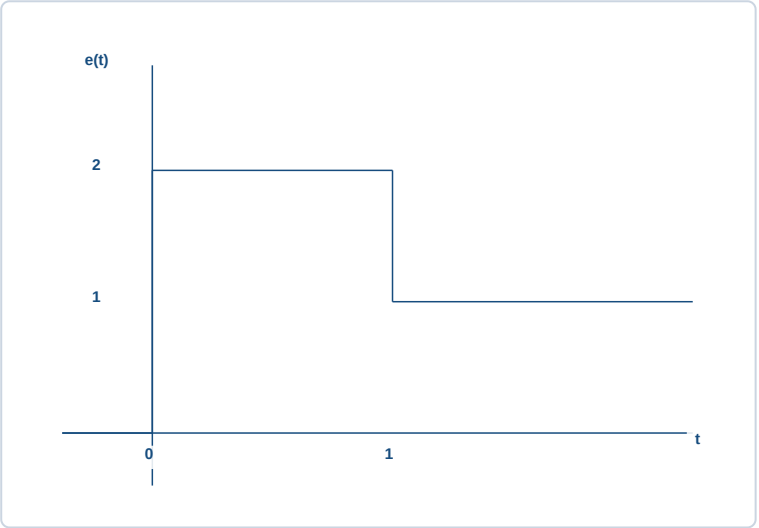
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède pour fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice mobilise les transformées de Laplace pour déterminer les signaux d'entrée et de sortie, puis étudier et représenter la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction d'entrée e(t).

La fonction échelon vaut 0 avant son instant de déclenchement et 1 à partir de cet instant. Ainsi, pour $t < 0$, les deux termes sont nuls. Pour $0 \leq t < 1$, seul $U(t)$ vaut 1, donc $e(t) = 2$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1 et $e(t) = 2 - 1 = 1$. Le tracé présente donc des sauts en $t = 0$ et en $t = 1$.

Courbe représentative de e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, puis $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer E(p), la transformée de Laplace du signal d'entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$, donc $2U(t)$ a pour transformée $2/p$. Pour le terme retardé, $U(t-1)$ est de la forme $U(t-a)$ avec $a = 1$, donc sa transformée vaut e^{-p}/p. On soustrait cette dernière transformée, comme dans l'expression de $e(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − (1/[p(p + 1)])e⁻ᵖ.

Par définition de la fonction de transfert, $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par $(2 - e^{-p})/p$, obtenu à la question précédente. En mettant le produit sous un dénominateur commun, puis en séparant les deux termes du numérateur, on obtient l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le premier terme devient $(p+1)/[p(p+1)]$ et le second $p/[p(p+1)]$. Leur différence a pour numérateur $(p+1) - p = 1$. Elle est donc égale au membre de gauche, pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

Le formulaire donne directement les transformées des fonctions causales $U(t)$ et $e^{-t}U(t)$. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : si $f(t)$ a pour transformée $F(p)$, alors $F(p)e^{-p}$ a pour transformée inverse $f(t-1)U(t-1)$. On applique cette propriété à chacun des deux termes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$. L'inverse de $S(p)$ s'écrit alors $2(1 - e^{-t})U(t) - U(t-1) + e^{-(t-1)}U(t-1)$. Sur $[0;1[$, on a $U(t) = 1$ et $U(t-1) = 0$. Les deux termes retardés s'annulent donc et il reste la première partie du signal.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. **Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

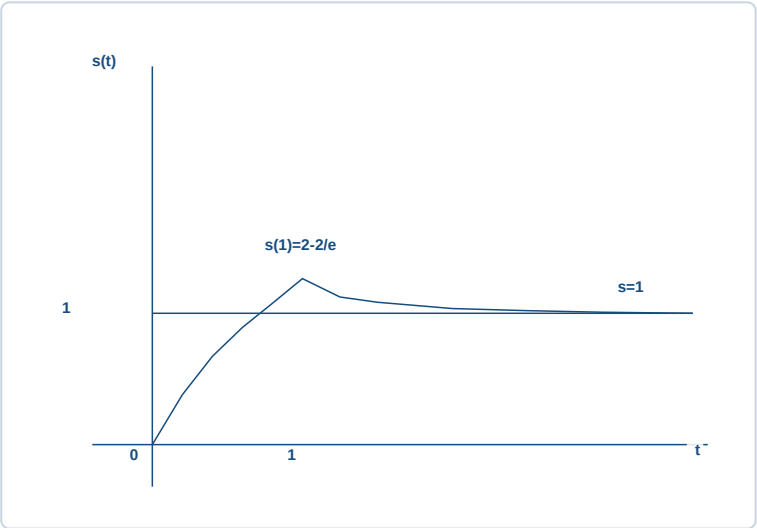
On évalue l'expression admise sur $[1;+\infty[$ à l'instant $t=1$: $s(1)=(e-2)e^{-1}+1$. Comme $(e-2)/e=1-2/e$, cette valeur se simplifie en $2-2/e$. En utilisant $e\approx 2{,}71828$, on obtient environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1)=2-\dfrac{2}{e}\approx 1{,}3.$

Question 5. b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la sortie vaut $2(1-e^{-t})$ et croît de 0 à $2-2/e$. À partir de $t=1$, elle vaut $(e-2)e^{-t}+1$ et décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t=1$, soit environ $1{,}3$: la courbe est donc continue à cet instant. Elle se rapproche ensuite de l'asymptote horizontale $s=1$.

Courbe représentative de s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5. c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t\geq 1$, la sortie est donnée par $s(t)=(e-2)e^{-t}+1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme e^{-t} tend vers 0. Son produit par la constante $e-2$ tend donc également vers 0. La limite de la somme est alors la constante restante, égale à 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, durée deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de traiter l'équation avec second membre.
- Si $f(t)$ tend vers L quand t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- Le décalage temporel vérifie $\mathcal{L}\{f(t - a)U(t - a)\} = F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour le tableau de variations, établir le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Distinguer la limite de la vitesse et l'atteinte effective d'une vitesse nulle.
- Dans le développement limité, repérer le terme quadratique et vérifier la condition imposée au reste.
- Pour les tracés, respecter les changements de valeur aux instants 0 et 1 et identifier clairement les axes.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction vitesse ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle considéré. Si F est une primitive de f, la distance entre t_0 et t_1 vaut $F(t_1) - F(t_0)$. Dans ce sujet, f représente une vitesse positive.

Q : Comment traiter le décalage d'un signal avec la transformée de Laplace ?

On utilise $\mathcal{L}\{f(t - a)U(t - a)\} = F(p)e^{-ap}$. Le facteur exponentiel traduit le retard a ; pour retrouver le signal temporel, on applique la propriété de décalage à la transformée inverse.

Q : Comment organiser le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre les deux problèmes et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et tracés, ainsi que pour reporter les courbes demandées sur le document-réponse.

Q : Quels coefficients s'appliquent et que précise le sujet sur la notation ?

Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Pour le QCM, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point ; aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2022/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Fluides Énergies Domotique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.