Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS FLUIDES ÉNERGIES DOMOTIQUE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2023/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), en centimètres, entre le fond d’un tiroir et celui du meuble est modélisée au cours de la fermeture. Deux parties indépendantes étudient l’équation différentielle et les conditions initiales, puis les variations, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L’équation produit est nulle si l’un de ses facteurs est nul, soit $r + 1 = 0$ ou $r + 4 = 0$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D’après le tableau fourni, les solutions de l’équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position du point M et de sa vitesse à l’instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

La distance entre O et M à l’instant initial est de 20 cm. Comme $f(t)$ représente cette distance, sa valeur initiale est 20. La vitesse donnée est négative car la distance diminue pendant le déplacement vers O ; elle correspond à la dérivée de la distance à l’instant initial.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdotp s^{-1}}$.

Question 2.b. En utilisant l’expression admise de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La formule admise est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. À deux secondes, on substitue $t = 2$, donc les exposants deviennent -2 et -8. La distance obtenue est exprimée en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes.

Il suffit de vérifier le seuil à un instant strictement inférieur à 4 s. Avec l'expression de f, on obtient $f(3{,}9) \approx 0{,}472$ cm. Cette distance est inférieure à 0,5 cm, et 3,9 s est inférieur à 4 s : le critère de fermeture est donc atteint avant la durée annoncée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Les deux termes de l'expression de $f(t)$ tendent donc vers 0, et leur différence aussi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, située sur l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de f, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La fonction est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, puisque $f'(t) < 0$. Son point de départ est $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	0
Variation	$20 \searrow 0$	

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. Recopier et compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en arrondissant les valeurs de f(t) au centième et en évaluant la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La condition testée est $f(t) > 0{,}5$. On poursuit donc les valeurs de t par pas de 0,1, en arrondissant chaque valeur de $f(t)$ au centième, jusqu'au premier test faux.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3{,}8$, la condition de la boucle reste vraie car $f(3{,}8) \approx 0{,}52 > 0{,}5$. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse car $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$. La boucle s'arrête alors et le tiroir satisfait le critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s ; le tiroir est fermé.

Question 4. La position moyenne est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - 35/6 e⁻⁴ + 5/24 e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}(F(4) - F(0)) = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right]$. En regroupant les termes constants et exponentiels, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

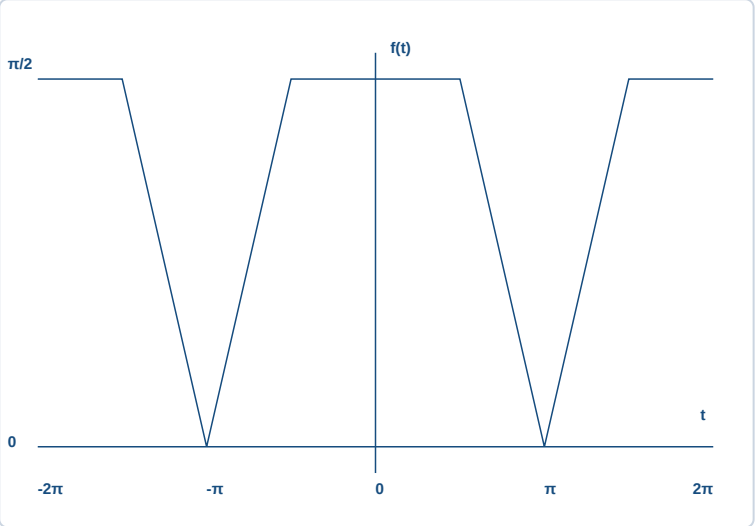
2. Série de Fourier d’une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et son développement en série de Fourier. Les questions portent sur son tracé, les coefficients et sommes partielles, le choix d’une courbe et l’erreur d’approximation d’une valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.

Sur une période centrée en 0, la fonction vaut $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Elle descend linéairement jusqu’à 0 en π, et remonte symétriquement jusqu’à $\pi/2$ en $-\pi$. La périodicité de période 2π répète ce motif sur tout l’intervalle demandé. Les segments du tracé passent donc par les points indiqués dans le résultat.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Relier les points $(-2\pi, \pi/2)$, $(-3\pi/2, \pi/2)$, $(-\pi, 0)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$ et $(2\pi, \pi/2)$ par des segments.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. La fonction est paire et périodique, donc $f(2\pi - t) = f(t)$. En revanche, $\sin(n(2\pi - t)) = -\sin(nt)$ pour tout entier n. Dans l’intégrale sur une période, les contributions des points t et $2\pi - t$ s’annulent deux à deux. Ainsi, tous les coefficients sinus sont nuls.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

Le formulaire relie la période et la pulsation par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. L'énoncé indique que la période vaut $T = 2\pi$. En remplaçant la période dans la formule, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps, comme le paramètre t de la fonction.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à 3π/8.**

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Par parité et périodicité, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur le premier intervalle, $f(t) = \pi/2$, et sur le second, $f(t) = \pi - t$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{3\pi^2}{8}$. La division par π donne le coefficient demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π) ∫_(π/2)^π (π - t) cos(nt) dt.**

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, on obtient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare cette intégrale en $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$, puis on remplace $f(t)$ par sa définition sur chacun de ces intervalles. Le facteur $\pi/2$ du premier morceau se simplifie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En utilisant l'expression admise de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique l'expression admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent respectivement 0 et -1, donc $a_1 = 2/\pi$. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1, donc $a_2 = -1/\pi$. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1, donc $a_3 = 2/(9\pi)$. Ces valeurs sont exactes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des résultats précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$: $s_3(t) = 3\pi/8 + 2/\pi \cos(t) - 1/\pi \cos(2t) + 2/(9\pi) \cos(3t)$.

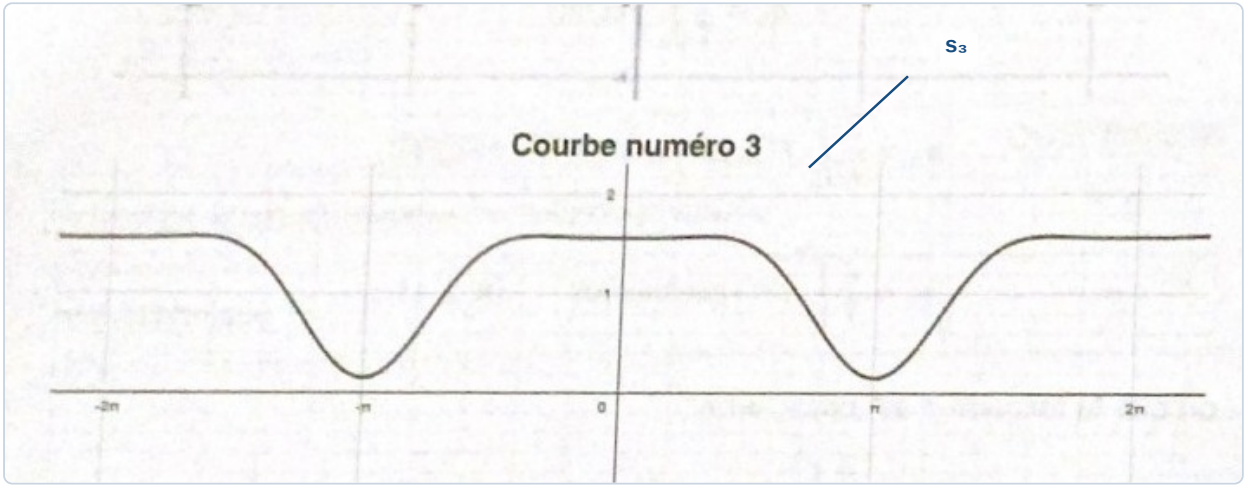
La somme partielle s'obtient avec $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$. Les coefficients sinus sont nuls, et la pulsation vaut 1. On remplace alors a_0 par $3\pi/8$ et les trois coefficients calculés précédemment par leurs valeurs. La combinaison obtenue est la somme partielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La courbe cherchée doit être paire et périodique de période 2π. L'expression de s_3 donne un maximum près de $t = 0$ et des minima près de $t = -\pi$ et $t = \pi$. Parmi les trois tracés du sujet, seule la courbe numéro 3 présente cette allure, avec une forme arrondie correspondant à la somme des trois premiers termes harmoniques.

Courbe représentant s_3



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Ainsi, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2]$. L'évaluation numérique donne environ $1{,}6437$. L'arrondi demandé est au 10^{-4} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **On admet que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F². Parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, choisir le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur est $\frac{|P-F^2|}{F^2} \times 100$. En utilisant la valeur obtenue pour P et $F^2 = \pi^2/6$, on trouve une erreur d'environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les trois choix proposés, cette valeur est la plus proche de $0{,}1\,\%$. Le choix demandé est donc le premier.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure deux heures. Son coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10, portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une équation différentielle et sur l'étude de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent la solution générale, puis les conditions initiales fixent les constantes.
- La limite de f en $+\infty$ donne l'asymptote horizontale, tandis que le signe de f' détermine le sens de variation.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et a_n se calcule sur une demi-période avec la formule adaptée.
- La somme partielle s_n conserve les coefficients jusqu'à l'ordre n ; l'erreur relative compare l'approximation à la valeur exacte.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la position f(0) de la vitesse f'(0), en respectant leurs unités et le signe de la vitesse.
- Dans l'algorithme, suivre l'incrément de t et vérifier la condition à chaque ligne jusqu'à sa première fausseté.
- Pour les coefficients de Fourier, utiliser la période correcte, la pulsation ω et les formules adaptées à une fonction paire.
- Pour l'erreur en pourcentage, comparer P à F^2, et respecter les arrondis demandés ainsi que l'unique réponse du QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Utilisez ses racines pour écrire la solution générale, puis déterminez les constantes avec f(0) et f'(0). Vérifiez enfin que les signes et unités sont cohérents avec le mouvement.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Cela entraîne $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Chaque exercice vaut 10 points et les deux parties du premier exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps selon les points et votre aisance, puis gardez une marge pour contrôler calculs, arrondis et document-réponse.

Q : Quelles précisions respecter pour les réponses numériques et le QCM ?

Le sujet demande des valeurs exactes pour plusieurs résultats, des valeurs de f(t) arrondies au centième dans le tableau et P à 10^{-4} près. Pour le QCM final, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-fed.fr/assets/annales/bts-fed/E2 - Mathématiques/2023/BTS FED - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Fluides Énergies Domotique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.